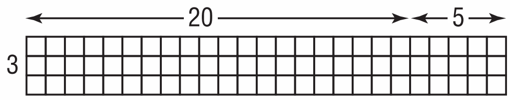
5.5 Multiplier et diviser un polynôme par un terme constant

OBJECTIF

- Appliquer différentes stratégies pour multiplier et diviser un polynôme par un terme constant.

Comment le diagramme suivant modélise-t-il le produit de 3×25 ?



Quelle propriété ce diagramme illustre-t-il ?
Comment pourrais-tu utiliser un tel diagramme pour modéliser une division ?

Explore

Utilise les stratégies ou le matériel de ton choix.

➤ Calcule les produits suivants. Écris des expressions polynomiales de multiplication.

- $2(3x)$
- $3(2x + 1)$
- $2(2x^2 + x + 4)$
- $-2(3x)$
- $-3(2x + 1)$
- $-2(2x^2 + x + 4)$

➤ Calcule les quotients suivants. Écris des expressions polynomiales de division.

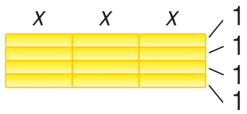
- $9x \div 3$
- $(8x + 12) \div 4$
- $(5x^2 + 10x + 20) \div 5$
- $9x \div (-3)$
- $(8x + 12) \div (-4)$
- $(5x^2 + 10x + 20) \div (-5)$

Mise en commun

Compare tes stratégies et tes résultats avec ceux d'une autre équipe.
Si vos résultats sont différents, détermine pourquoi.
Examine tes expressions polynomiales de multiplication et de division.
Quelles relations observes-tu entre les termes de départ et les résultats ?
Comment pourrais-tu te fonder sur ces relations pour effectuer des multiplications et des divisions sans utiliser de carreaux algébriques ?

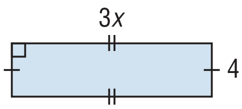
Découvre

➤ L'expression $4(3x)$ est une expression polynomiale de multiplication.
En effet, elle représente le produit du terme constant 4 et du monôme $3x$.
Ce produit peut être modélisé par 4 rangées composées de 3 carreaux x.



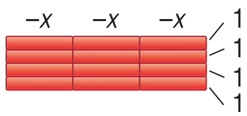
Donc, $4(3x) = 3x + 3x + 3x + 3x$ Il s'agit d'une addition répétée.
$= 12x$

Il est aussi possible de modéliser $4(3x)$ sous la forme de l'aire d'un rectangle dont les dimensions sont 4 et $3x$.



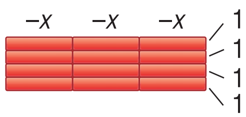
Donc, $4(3x) = 4(3)(x)$
$= 12x$

➤ $4(-3x)$ est le produit de 4 et du monôme $-3x$.
Ce produit peut être modélisé par 4 rangées composées de 3 carreaux $-x$.



Donc, $4(-3x) = -3x - 3x - 3x - 3x$
$= -12x$

➤ $-4(3x)$ est l'opposé de $4(3x)$.
Il est possible de modéliser ce produit en retournant les carreaux utilisés pour modéliser $4(3x)$.



Donc, $-4(3x) = -(12x)$
$= -12x$

Cette stratégie peut également servir à multiplier un binôme ou un trinôme par un terme constant à l'aide de carreaux algébriques. Pour calculer un produit de façon symbolique, on utilise une propriété appelée la *distributivité*.

Exemple 1 Multiplier un binôme et un trinôme par un terme constant

Calcule chaque produit.

a) $3(-2m + 4)$ **b)** $-2(-n^2 + 2n - 1)$

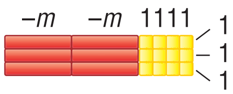
Solutions

Méthode 1

Utilise des carreaux algébriques.

a) $3(-2m + 4)$

Forme 3 rangées de deux carreaux $-m$ et de quatre carreaux unitaires positifs.

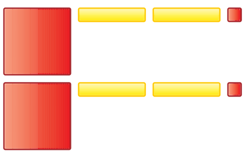


Il y a six carreaux $-m$ et douze carreaux unitaires positifs.

Donc, $3(-2m + 4) = -6m + 12$

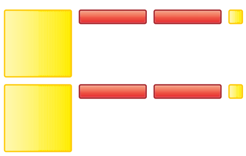
b) $-2(-n^2 + 2n - 1)$

Forme 2 rangées de un carreau $-n^2$, de deux carreaux n et de un carreau unitaire négatif.



Ce modèle représente $2(-n^2 + 2n - 1)$.

Retourne les carreaux.



Il y a deux carreaux n^2, quatre carreaux $-n$ et deux carreaux unitaires positifs.

Donc, $-2(-n^2 + 2n - 1) = 2n^2 - 4n + 2$

Méthode 2

Utilise la distributivité.

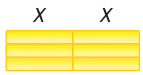
Multiplie chaque terme à l'intérieur des parenthèses par le terme à l'extérieur des parenthèses.

a)
$$\begin{aligned} 3(-2m + 4) &= 3(-2m) + 3(4) \\ &= -6m + 12 \end{aligned}$$

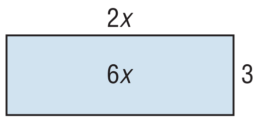
b)
$$\begin{aligned} &-2(-n^2 + 2n - 1) \\ &= (-2)(-1n^2) + (-2)(2n) + (-2)(-1) \\ &= 2n^2 + (-4n) + 2 \\ &= 2n^2 - 4n + 2 \end{aligned}$$

La multiplication et la division sont des opérations inverses. Pour diviser un polynôme par un terme constant, il s'agit d'effectuer le processus inverse de la multiplication.

➤ L'expression $6x \div 3$ est une expression polynomiale de division.
Cette expression représente le quotient du monôme $6x$ et du terme constant 3.
Pour modéliser $6x \div 3$,
il faut disposer six carreaux x sur 3 rangées.
Chaque rangée contient deux carreaux x.
Donc, $6x \div 3 = 2x$



L'expression $6x \div 3$ peut aussi être modélisée par l'une des dimensions d'un rectangle ayant une aire de $6x$, et dont l'autre dimension est 3.



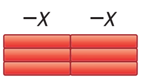
Ainsi, $6x \div 3 = \frac{6x}{3}$
$= 2x$

Le calcul du quotient peut également faire appel aux connaissances acquises sur la division de nombres entiers et sur la division écrite sous la forme d'une fraction.

$$\frac{6x}{3} = \frac{6}{3} \times x$$
$$= 2 \times x$$
$$= 2x$$

➤ $(-6x) \div 3$ représente le quotient du monôme $-6x$ et du terme constant 3.

Si l'on se base sur un modèle :
Il s'agit de disposer six carreaux $-x$ sur 3 rangées.



Chaque rangée contient deux carreaux $-x$.
Donc, $(-6x) \div 3 = -2x$

Si l'on se base sur des fractions et des nombres entiers :
$(-6x) \div 3 = \frac{-6x}{3}$
Simplifie la fraction.
$(-6x) \div 3 = \frac{-6}{3} \times x$
$= -2 \times x$
$= -2x$

➤ $6x \div (-3)$ représente le quotient du monôme $6x$ et du terme constant -3.
Si l'on se base sur des fractions et des nombres entiers :
$6x \div (-3) = \frac{6x}{-3}$
Simplifie la fraction.
$6x \div (-3) = \frac{6}{-3} \times x$
$= -2 \times x$
$= -2x$

Exemple 2 Diviser un binôme et un trinôme par un terme constant

Calcule chaque quotient.

a) $\dfrac{4s^2 - 8}{4}$

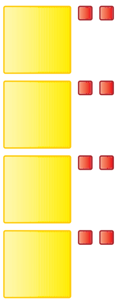
b) $\dfrac{-3m^2 + 15mn - 21n^2}{-3}$

Solutions

Méthode 1

a) $\dfrac{4s^2 - 8}{4}$

Utilise des carreaux algébriques.
Dispose quatre carreaux s^2 et huit carreaux unitaires négatifs sur 4 rangées égales.



Chaque rangée contient un carreau s^2 et deux carreaux unitaires négatifs.

Donc, $\dfrac{4s^2 - 8}{4} = s^2 - 2$

b) $\dfrac{-3m^2 + 15mn - 21n^2}{-3}$

Pense aux multiplications.
Par quoi -3 est-il multiplié pour obtenir $-3m^2 + 15mn - 21n^2$?

$(-3) \times ? = -3m^2 + 15mn - 21n^2$

Puisque $(-3) \times 1 = -3$,
alors $(-3) \times (1m^2) = -3m^2$

Puisque $(-3) \times (-5) = 15$,
alors $(-3) \times (-5mn) = +15mn$

Puisque $(-3) \times 7 = -21$,
alors $(-3) \times (+7n^2) = -21n^2$

Donc,
$\dfrac{-3m^2 + 15mn - 21n^2}{-3} = m^2 - 5mn + 7n^2$

Méthode 2

a) $\dfrac{4s^2 - 8}{4}$

Écris le quotient sous la forme de la somme de 2 fractions.

$$\frac{4s^2 - 8}{4} = \frac{4s^2}{4} + \frac{-8}{4}$$

Simplifie chaque fraction.

$$= \frac{4}{4} \times s^2 + (-2)$$
$$= 1 \times s^2 - 2$$
$$= s^2 - 2$$

b) $\dfrac{-3m^2 + 15mn - 21n^2}{-3}$

Écris le quotient sous la forme d'une somme de 3 fractions.

$$\frac{-3m^2 + 15mn - 21n^2}{-3}$$
$$= \frac{-3m^2}{-3} + \frac{15mn}{-3} + \frac{-21n^2}{-3}$$

Simplifie chaque fraction.

$$= m^2 + (-5mn) + (7n^2)$$
$$= m^2 - 5mn + 7n^2$$

Exprime tes idées

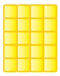
1. Comment peux-tu vérifier le quotient d'une division à l'aide de la multiplication ?

2. Pourquoi n'est-il pas possible d'effectuer une division à l'aide de carreaux algébriques quand le diviseur est négatif ?

À ton tour

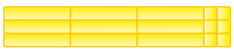
Vérification

3. Écris l'expression polynomiale de multiplication que représente chacun des ensembles de carreaux algébriques suivants.

a) 

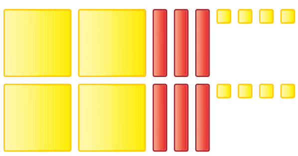
b) 

c) 

d) 

4. Écris l'expression polynomiale de division qui correspond à chacun des ensembles de carreaux algébriques de la question 3.

5. a) Cet ensemble de carreaux algébriques représente un des produits ci-dessous. Lequel ?
   i) $2(-2n^2 + 3n + 4)$
   ii) $2(2n^2 - 3n + 4)$
   iii) $-2(2n^2 - 3n + 4)$



   b) En a), le modèle en carreaux algébriques représente un seul des produits. Modélise les deux autres produits. Dessine les carreaux que tu as utilisés.

6. Cet ensemble de carreaux algébriques représente un des quotients ci-dessous. Lequel ?
   a) $\dfrac{8t - 12}{-4}$
   b) $\dfrac{-8t - 12}{4}$
   c) $\dfrac{8t - 12}{4}$

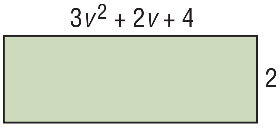
Mise en application

7. a) Effectue les multiplications suivantes.
   i) $3(5r)$ ii) $-3(5r)$
   iii) $(5r)(3)$ iv) $-5(3r)$
   v) $-5(-3r)$ vi) $(-3r)(5)$
   b) Explique pourquoi certains produits en a) sont identiques.
   c) Quels produits en a) aurais-tu pu calculer à l'aide de carreaux algébriques ? Dessine les carreaux que tu aurais pu utiliser pour modéliser chacun.

8. a) Effectue les divisions suivantes.
   i) $\dfrac{12k}{4}$ ii) $(-12k) \div 4$
   iii) $\dfrac{12k}{-4}$ iv) $(-12k) \div (-4)$
   b) Explique pourquoi certains quotients en a) sont identiques.
   c) Quels quotients en a) aurais-tu pu calculer à l'aide de carreaux algébriques ? Dessine les carreaux que tu aurais pu utiliser pour modéliser chacun.

9. Écris l'expression polynomiale de multiplication que représente chacun des rectangles suivants.

a)



b)

10. Écris l'expression polynomiale de division qui correspond à chacun des rectangles de la question 9.

11. Calcule chaque produit à l'aide de carreaux algébriques. Dessine les carreaux que tu as utilisés. Écris le produit de façon symbolique.

a) $7(3s + 1)$
b) $-2(-7h + 4)$
c) $2(-3p^2 - 2p + 1)$
d) $-6(2v^2 - v + 5)$
e) $(-w^2 + 3w - 5)(3)$
f) $(x^2 + x)(-5)$

12. Voici comment un élève a résolu la multiplication suivante :

$$-2(4v^2 - v + 7) = -2(4v^2) - 2(v) - 2(7)$$
$$= -8v^2 - 2v - 16$$

Repère les erreurs qu'il a faites, puis écris la solution appropriée.

13. Calcule chaque quotient à l'aide de carreaux algébriques. Dessine les carreaux que tu as utilisés. Écris les quotients de façon symbolique.

a) $\dfrac{12p - 18}{6}$ **b)** $\dfrac{-6q^2 - 10}{2}$

c) $\dfrac{5h^2 - 20h}{5}$ **d)** $\dfrac{4r^2 - 16r + 6}{2}$

e) $\dfrac{-8a^2 + 4a - 12}{4}$ **f)** $\dfrac{6x^2 + 3x + 9}{3}$

14. Voici la solution qu'un élève a apportée à la question suivante :
Effectue cette division : $(-14m^2 - 28m + 7) \div (-7)$

$$(-14m^2 - 28m + 7) \div (-7)$$
$$= \frac{-14m^2}{-7} + \frac{-28m}{7} + \frac{-7}{7}$$
$$= 2m^2 - 4m + 0$$
$$= -2m$$

Repère les erreurs qu'il a faites, puis écris la solution appropriée.

15. Applique les stratégies de ton choix pour calculer les produits suivants.

a) $-3(-4u^2 + 16u + 8)$
b) $12(2m^2 - 3m)$
c) $(5t^2 + 2t)(-4)$
d) $(-6s^2 - 5s - 7)(-5)$
e) $4(-7y^2 + 3y - 9)$
f) $10(8n^2 - n - 6)$

16. Applique les stratégies de ton choix pour calculer les quotients suivants.

a) $\dfrac{24d^2 - 12}{12}$
b) $\dfrac{8x + 4}{4}$
c) $\dfrac{-10 + 4m^2}{-2}$
d) $(25 - 5n) \div (-5)$
e) $(-14k^2 + 28k - 49) \div 7$
f) $\dfrac{30 - 36d^2 + 18d}{-6}$
g) $\dfrac{-26c^2 + 39c - 13}{-13}$

17. Quelles paires d'expressions sont équivalentes ? Explique comment tu le sais.

a) $5j^2 + 4$ et $5(j + 4)$
b) $10x^2$ et $3x(x + 7)$
c) $15x - 10$ et $5(-2 + 3x)$
d) $-3(-4x - 1)$ et $12x^2 - 3x$
e) $-5(3x^2 - 7x + 2)$ et $-15x^2 + 12x - 10$
f) $2x(-3x - 7)$ et $-6x^2 - 14x$

18. **Objectif d'évaluation**

a) Calcule chaque produit ou quotient.

i) $(3p)(4)$ ii) $\frac{-21x}{3}$

iii) $(3m^2 - 7)(-4)$

iv) $\frac{-2f^2 + 14f - 8}{2}$

v) $(6y^2 - 36y) \div (-6)$

vi) $(-8n + 2 - 3n^2)(3)$

b) Dresse la liste des produits et des quotients en a) qu'il est possible de modéliser à l'aide de carreaux algébriques. Explique ton choix.

c) Dessine le modèle en carreaux algébriques d'un produit et d'un quotient en a).

19. a) Calcule les produits suivants.

i)	ii)
$2(2x + 1)$	$2(1 - 2x)$
$3(2x + 1)$	$3(1 - 2x)$
$4(2x + 1)$	$4(1 - 2x)$
$5(2x + 1)$	$5(1 - 2x)$

b) Décris les régularités que tu observes en a).

c) Prédis les 3 prochains produits de chaque liste en a). Comment sais-tu que ces produits sont exacts ?

d) Suppose que tu dois prolonger les listes en a) ; prédis les 3 produits précédents de chacune.

20. a) Le polynôme $15a^2 + 21a + 6$ représente le périmètre d'un triangle équilatéral. Détermine le polynôme qui représente la longueur d'un côté de ce triangle.

b) Calcule la longueur d'un côté quand $a = 4$ cm.

21. La longueur des côtés du carré A est $4c + 1$. La longueur des côtés du carré B est 3 fois plus grande que celle du carré A.

a) Quel est le périmètre de chaque carré ? Explique tes réponses.

b) Représente par un polynôme simplifié la différence entre les périmètres des carrés A et B.

22. Calcule les produits suivants.

a) $2(2x^2 - 3xy + 7y^2)$

b) $-4(pq + 3p^2 + 3q^2)$

c) $(-2gh + 6h^2 - 3g^2 - 9g)(3)$

d) $5(-r^2 + 8rs - 3s^2 - 5s + 4r)$

e) $-2(4t^2 - 3v^2 + 19tv - 6v - t)$

23. Calcule les quotients suivants.

a) $(3n^2 - 12mn + 6m^2) \div 3$

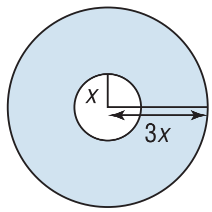
b) $\frac{-6rs - 16r - 4s}{-2}$

c) $\frac{10gh - 30g^2 - 15h}{5}$

d) $(12t^2 - 24ut - 48t) \div (-6)$

Va plus loin

24. Le monôme πr^2 représente l'aire d'un cercle. Représente par un polynôme la partie ombrée du diagramme suivant, puis simplifie-le.



Réfléchis

Quelle est la relation entre la multiplication et la division d'un polynôme par un terme constant ? Accompagne ton explication d'exemples.